双曲型方程式の混合問題におけるLocalization Theoremについて (超函数論と偏微分方程式の理論)

松村, 睦豪

数理解析研究所講究録
145巻 1972年 12-25

双曲型方程式の混合問題における Localization Theorem について

京大・工　松村睦豪

まえがき

近年 L. Hörmander により一般な偏微分方程式の distribution solution の singular support に関する研究がすゝめられているが ✝ (例えば [6] を見よ) Atiyah, Bott, Gårding はその idea をとり入れ 自由空間における定数係数の双曲型作用素に対する Cauchy 問題の基本解の singular support に関し所謂 Localization Theorem を得た．これは Atiyah, Bott, Gårding による労作 [1] の中では極めて初等的な一定理に過ぎないが その idea や方法は非常に興味深いように思われる．

この報告の目的は定数係数の双曲型作用素に対する quarter-space における混合問題の反射波の singular support に関し対応する Localization Theorem を与えることである．

✝ hyperfunction solution については Sato, Kawai and Kashiwara による研究がある．これについては例えば M. Sato [7] 参照

§1. 双曲型作用素の基本解とLocalization Theorem

$\mathbb{R}^n$をn次元Euclid空間としその点を$x=(x_1,\cdots,x_n)$等で表わす。また$\mathbb{C}^n$をn次元複素数空間としその点を$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$等で表わす。$\mathbb{C}^n$は$x\cdot\xi=\langle x,\xi\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j$により$\mathbb{R}^n$の複素双対空間と見做される。特に$\mathbb{C}^n$の実ベクターの全体を$\Xi^n$で表わすと$\Xi^n$は$\mathbb{R}^n$の実双対空間となる。文字の節約の為$x_1$で時間変数を$x_2,\cdots,x_n$で空間変数を表わすことにし$x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$ $x''=(x_2,\cdots,x_n)$なる記法を用いる。$\mathbb{C}^n$或いはΞ^nの点ξに対しても同様の記法を用いることにする。また$\mathbb{R}^n_+$で半空間$\{x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n, x_n>0\}$を表わす。微分記号については$D=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$を用いる。

さて$P(\xi)$をGårdingの意味で$\vartheta=(1,0,\cdots,0)$に関し双曲的な多項式としよう。すなわち$P(\xi)$は次の2つの条件を満足するものとする。

(1.1) $P_m(\vartheta)\neq 0$，ここでP_mはPの主部を表わす。

(1.2) 適当な実数t_0が存在し，$\mathrm{Im}\,t<t_0$なる任意の複素数tと$\forall\xi\in\Xi^n$に対し$P(\xi+t\vartheta)\neq 0$が成り立つ。

このときPの主部P_mはまたϑに関し双曲多項式となりP_mの斉次性から$P_m(\xi+t\vartheta)=0$の根$t=t(\xi)$は$\forall\xi\in\Xi^n$に対しすべて実数となることがわかる。そこで実超曲面$\{\xi;P_m(\xi)=0,\xi\in\Xi^n\}$を考えこれを$\mathrm{Re}\,A$で表わす。そして$\Xi^n-\mathrm{Re}\,A$の連結成分

のうちϑを含むものを$\Gamma=\Gamma(A,\vartheta)$と記すと$\Gamma$は open convex cone となることが証明される. Γの dual cone $\Gamma'=\{x\in R^n;\ x\cdot\xi\geqq 0,\ \xi\in\Gamma\}$を$K=K(A,\vartheta)$で表わし propagation cone と呼ぶ.

双曲多項式$P(\xi)$から$\xi\to D$なる置き換えによって得られる微分作用素$P(D)$は propagation cone K内にその support が含まれる基本解$E(x)$; $P(D)E(x)=\delta(x)$をもつ. 実際そのような$E(x)$はP^{-1}の distribution の意味での逆 Fourier-Laplace transform として

$$(1.3)\qquad E(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\Xi^n} e^{ix(\xi+i\eta)}\,P(\xi+i\eta)^{-1}\,d\xi,\quad \underset{t\text{は十分大}}{\eta\in -t\vartheta-\Gamma},$$

で与えられ supp E の closed convex hull はKに一致する. また逆に定数係数の微分作用素$P(D)$が open half-space $\{x;\ x\vartheta>0\}$に原点を除いて含まれるような closed convex cone に support が含まれる基本解をもつとき$P(D)$の特性多項式$P(\xi)$はϑに関し双曲的となりその基本解は(1.3)で定義される$E(x)$と一致する. $E(x)$は$P(D)$の未来に対する Cauchy 問題

$$(1.4)\qquad P(D)\,E(x)=0\quad,\quad x_1>0,$$

$$(1.5)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k}E(0,x'')=0,\ k=0,1,\cdots,m-2,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m-1}E(0,x'')=\delta(x''),$$

の解であり, しばしば$P(D)$の未来に対する Cauchy 問題の基本解或いは Riemann 函数, Green 函数と呼ばれる.

さて$E(x)$に対する Localization Theorem を述べる為に [1] に

従い多項式の localization の概念を導入する.

定義. $P(\zeta)$ を次数 $m \geqq 0$ の多項式とし $t^m P(t^{-1}\xi+\zeta)$ を t の昇巾の順に展開する.

(1.6) $$t^m P(t^{-1}\xi+\zeta) = t^p P_\xi(\zeta) + O(t^{p+1}).$$

そのとき係数は ζ の多項式となるが, ζ について恒等的には 0 とならない最初の係数を $P_\xi(\zeta)$ で表わし P の点 ξ における localization と呼ぶ. 又次数 p は ξ の P に関する multiplicity と呼ばれ $m_\xi(P)$ で表わされる.

$P_m(\xi) \neq 0$ のとき P の ξ における localization は $P_\xi(\zeta) = P_m(\xi)$ と 0 でない定数となり興味がない. $P_m(\xi) = 0$ で $\operatorname{grad} P_m(\xi) \neq 0$ のとき $P_\xi(\zeta) = \operatorname{grad} P_m(\xi) \cdot \zeta + P_{m-1}(\xi)$ となる. $P(\zeta)$ が ϑ に関し双曲的なとき real point ξ における localization $P_\xi(\zeta)$ もまた ϑ に関し双曲的となり $P_\xi(\zeta)$ の主部は $P(\zeta)$ の主部 $P_m(\zeta)$ の ξ における localization と一致することが証明される. 実超曲面 $\{\zeta ; (P_m)_\xi(\zeta) = 0\}$ を $R_e A_\xi$ で表わし $R_e A$ の ξ における real tangent cone と呼ぶ. $P_\xi(\zeta)$ は ϑ 方向に双曲的だから $\Gamma_\xi = \Gamma(A_\xi, \vartheta)$ $K_\xi = \Gamma_\xi'$ が定義される. また $P_\xi(\zeta)$ に対応する基本解

(1.7) $$(2\pi)^{-n} \int_{\Xi^n} P_\xi(\zeta + i\eta)^{-1} e^{ix(\zeta+i\eta)} d\zeta, \quad \eta \in -s\vartheta - i\Gamma_\xi$$

が存在するが, これを $E_\xi(x)$ で表わし $E(x)$ の ξ における localization と呼ぶ. 勿論 $\operatorname{supp} E_\xi(x) \subset K_\xi$ である.

さてこのとき次の定理が成り立つ.

<u>Localization Theorem</u> (Atiyah–Bott–Gårding)

$t \to \infty$ のとき $t^{m-p} e^{-itx\xi} E(x) \to E_\xi(x)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

であり

$$\xi \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{supp}\, E_\xi \subset \mathrm{sing\,supp}\, E$$

が成り立つ。

§2. 混合問題に対する Riemann or Green 函数

$P(D)$ を $\vartheta=(1,0,\cdots,0)$ に関し双曲的な作用素とし $B_j(D)$, $j=1,\cdots,l$ をそれぞれ階数 m_j の境界作用素としよう。吾々は超平面 $x_n=0$ は $P(D)$ および $B_j(D)$ に対し non-characteristic であることを仮定しよう。すなわち $P(\xi)$ の ξ_n^m の係数および $B_j(\xi)$ の $\xi_n^{m_j}$ の係数は 0 でない定数とする。$y=(0,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n_+$ として次の混合問題の解 $G(x,y)$ を考えよう。

(2.1) $\quad P(D_x)\,G(x,y)=0\ ,\quad x_1>0,\ x\in\mathbb{R}^n_+,$

(2.2) $\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k G(0,x'',y)=0,\ k=0,1,\cdots,m-2,\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m-1} G(0,x'',y)=\delta(x''-y''),$

(2.3) $\quad B_j(D_x)\,G(x,y)\Big|_{x_n=0}=0\ ;\quad j=1,\cdots,l.$

ここで境界条件の数 l は後できめられる。この解 $G(x,y)$ は空間 $\{x''=(x_2,\cdots,x_n);\ x_n>0\}$ の点によってその位置が表わされ，状態が $P(D)$ と境界条件 $B_j(D)$ によって支配される媒質において点 $x''=y''$ に加えられた単位衝撃 $\delta(x''-y'')$ による波動の伝播を記述するものと解釈される。

吾々は $G(x,y)$ を自由空間 $\{x''=(x_2,\cdots,x_n)\}$ の点 $x''=y''$ に加えられた単位衝撃による incident or primary waves と考えられる $E(x-y)$ $(y=(0,y''))$ を用い

$$(2.4)\qquad G(x,y)=E(x-y)-F(x,y)$$

なる形で求める. $F(x,y)$ は $E(x-y)$ が境界 $x_n=0$ 上に induce する影響を相殺せねばならないから混合問題

$$(2.5)\qquad P(D_x)F(x,y)=0,\quad x_1>0,\quad x\in\mathbb{R}^n_+,$$

$$(2.6)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k F(0,x'',y)=0,\quad k=0,1,\cdots,m-1,$$

$$(2.7)\qquad B_j(D_x)F(x,y)\Big|_{x_n=0}=B_j(D_x)E(x-y)\Big|_{x_n=0}.$$

の解として求められる. 補正函数と呼ばれる $F(x,y)$ は境界条件 $B_j(D)$ に関し境界で反射される反射波を表わすものと解釈される. また $G(x,y)$ は斉次境界条件をもつ混合問題の Riemann or Green 函数と考えてよい. それは混合問題

$$(2.8)\qquad P(D_x)u(x)=f(x),\quad x_1>0,\quad x\in\mathbb{R}^n_+,$$

$$(2.9)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k u(0,x'')=g_k(x'')\in C_0^\infty(\{x''=(x_2,\cdots,x_n);\ x_n>0\})$$

$$(2.10)\qquad B_j(D)u(x)\Big|_{x_n=0}=0\quad,\ j=1,\cdots,l$$

の解 $u(x)$ が $G(x,y)$ を用い

$$(2.11)\qquad u(x)=\int G(x,y)\,u_{m-1}(y'')\,dy''+\int\frac{\partial G}{\partial x_1}(x,y)\,u_{m-2}(y'')\,dy''$$
$$+\cdots\qquad+\int\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}G(x,y)\,u_0(y'')\,dy''$$
$$+\int_0^{x_1}d\tau\int G(x_1-\tau,x'',y)\,f(\tau,y'')\,dy'',$$

なる形で与えられるからである．たゞしこゝで

$$
\begin{aligned}
&u_0 = g_0(x''), \\
(2.12)\qquad &u_1 = g_1(x'') - \int \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} G(0, x'', y)\, g_0(y'')\, dy'', \\
&u_2 = g_2(x'') - \int \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_1^{m+1}} G(0, x'', y)\, g_0(y'')\, dy'' - \int \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} G(0, x'', y)\, g_1(y'')\, dy'' \\
&\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

とする．境界上に波動の source があるとき，すなわち非斉次境界条件

$$(2.10)' \qquad B_j(D)\, u(x)\Big|_{x_n=0} = h_j(x') \in C_0^\infty(\{x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}),\ x_1 > 0\})$$

の場合の解 $u(x)$ は

$$(2.13) \qquad P(D_x)\, F_i(x, y') = 0, \quad x_1 > 0,\ x \in \mathbb{R}^n_+,$$

$$(2.14) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k F_i(0, x'', y') = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m-1$$

$$(2.15) \qquad B_j(D_x)\, F_i(x, y')\Big|_{x_n=0} = \delta_{ji}\, \delta(x' - y'), \quad j = 1, \cdots, l$$

の解，即ち Poisson kernels $F_i(x, y')$, $i = 1, \cdots, l$ を用い (2.11) の右辺に

$$(2.16) \qquad \sum_{i=1}^{l} \int F_i(x, y')\, h_j(y')\, dy',$$

なる項をつけ加えることにより得られる．F_i の構成も F のそれと同様であるが吾々はこの報告では $F(x, y)$ に限ることにする．

さて $F(x, y)$ を構成する為しばらく形式的な議論を行う．(1.3)より

$$(2.17) \qquad B_j(D_x)\, E(x-y)\Big|_{x_n=0} = (2\pi)^{-n} \int_{\Xi^n} e^{i(x'-y')(\xi'+i\eta') - i y_n(\xi_n + i\eta_n)} \times \frac{B_j(\xi + i\eta)}{P(\xi + i\eta)}\, d\xi,$$

を得る．従って (2.5)，(2.7) において x' について partial Fourier-Laplace transform を行うと

$$(2.18)\qquad P(\xi'+i\eta', D_n)\hat{F}(\xi'+i\eta', x_n, y)=0\ ,\ x_n>0\ ,$$

$$(2.19)\qquad B_j(\xi'+i\eta', D_n)\hat{F}(\xi'+i\eta', x_n, y)\Big|_{x_n=0}$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iy(\xi+i\eta)}\frac{B_j(\xi+i\eta)}{P(\xi+i\eta)}d\xi_n\ ,$$

となる．これは parameters を含む常微分方程式の境界値問題に他ならない．この解の表示式を求める為，若干の代数的な準備をする．

§3. 代数的準備

吾々は $F(x,y)$ を $\hat{F}(\xi'+i\eta', x_n, y)$ の逆 Fourier-Laplace 像として得る為問題 (2.18)-(2.19) の $\{x_n; x_n>0\}$ における temperate solution を問題にする．その為まず ξ' を parameter とする，λ についての代数方程式

$$(3.1)\qquad P(\xi', \lambda)=0\quad ,\quad \xi'\in\mathbf{C}^n\ ,$$

の根についての考察を行う．

補助定理 ([1], 132頁)

$P(\xi)$ を $\vartheta\in\Xi^n$ に関し双曲的な多項式とする．従ってある負でない実数 s_0 で $\mathrm{Im}\, s<-s_0$ なる任意の複素数 s と $\forall\xi\in\Xi^n$ に対し $P(\xi+s\vartheta)\neq 0$ となるものがある．このとき

$\forall\xi\in\Xi$, $\mathrm{Im}\, s<-s_0$, $\mathrm{Im}\, t\leq 0$, $\forall\eta\in\Gamma$ に対し

$$(3.2)\qquad P(\xi+t\eta+s\vartheta)\neq 0$$

が成り立つ．P が homogeneous のときには $s_0=0$ ととれる．即ち

$\forall\xi\in\Xi$, $\mathrm{Im}\, s<0$, $\mathrm{Im}\, t\leq 0$, $\forall\eta\in\Gamma$ に対し

$$(3.2)'\qquad P(\xi+t\eta+s\vartheta)\neq 0$$

が成り立つ．

$\Gamma_0=\{\eta';\ (\eta',0)\in\Gamma\}$ とおく。このとき (3.2) より λ についての方程式 $P(\xi',\lambda)=0$ は $\xi'\in\Xi^{n-1}-is\vartheta'-i\Gamma_0$ $(s>s_0)$ のとき実根をもたないことがわかる。従って $P(\xi',\lambda)=0$ の虚部が正の根および負の根の数（勿論重複する場合にはその重複度もこめて算える）は $\xi'\in\Xi^{n-1}-is\vartheta'-i\Gamma_0$ $(s>s_0)$ なるときそれぞれ一定である。そこで前者の個数を l とする。この数 l が混合問題で要求される境界条件の個数となる。虚部が正の根を $\lambda_1(\xi')$, $\cdots$, $\lambda_l(\xi')$ で負の根を $\lambda_{l+1}(\xi')$, $\cdots$, $\lambda_m(\xi')$ で表わし

$$P^+=P^+(\xi',\lambda)=P_m(0,1)\prod_{k=1}^{l}(\lambda-\lambda_k(\xi')),\tag{3.3}$$

とおく。λ の多項式 $P^+(\cdot,\lambda)$ の係数は $\lambda_1(\xi')$, $\cdots$, $\lambda_l(\xi')$ の基本対称式であるから領域 $\Xi^{n-1}-is\vartheta'-i\Gamma_0$ $(s>s_0)$ において ξ' の解析函数である。次に μ についての方程式 $P_m(\xi',\mu)=0$ の根を $\mu_k(\xi')$, $k=1,\cdots,m$ で表わす。このとき

$$t^{-m}P(t\xi',t\mu)\longrightarrow P_m(\xi',\mu)\quad,\ t\to\infty,\tag{3.4}$$

なる関係に注意すると $\{\mu_k(\xi')\}$ の番号を適当につけかえると

$$t\to\infty \text{ のとき } \quad t^{-1}\lambda_k(t\xi')\longrightarrow\mu_k(\xi'),\ k=1,\cdots,m,\tag{3.5}$$

が成り立つことがわかる。さきの補助定理より $\xi'\in\Xi^{n-1}-i\Gamma_0$ のとき方程式 $P_m(\xi',\mu)=0$ は実根をもたず、従って虚部が正および負である根の数はそれぞれ一定となる。(3.5) より

$$\operatorname{Im}\mu_k(\xi')>0,\ k=1,\cdots,l,\quad \operatorname{Im}\mu_k(\xi')<0,\ k=l+1,\cdots,m.\tag{3.6}$$

であることがわかる。

$$(3.3)' \qquad P_m^+ = P_m^+(\xi', \mu) = P_m(0,1) \prod_{k=1}^{l} (\mu - \mu_k(\xi'))$$

とおく。$P^+(\xi', \lambda) = 0$ および $P_m^+(\xi', \mu) = 0$ の判別式をそれぞれ $D(P^+)(\xi')$, $D(P_m^+)(\xi')$ で表わそう：

$$(3.7) \qquad D(P^+)(\xi') = P_m(0,1)^{2m-2} \prod_{i>k} (\lambda_i(\xi') - \lambda_k(\xi'))^2,$$

$$(3.7)' \qquad D(P_m^+)(\xi') = P_m(0,1)^{2m-2} \prod_{i>k} (\mu_i(\xi') - \mu_k(\xi'))^2.$$

そのとき $D(P_m^+)(\xi')$ は $\Xi^{n-1} - i(\Gamma_0 \cup \{0\})$ へ連続的に拡張される。

次に system $\{P, B_j\}$ に対する Lopatinski determinant を

$$(3.8) \qquad R(\xi') = R(P^+, B_1, \cdots, B_l) = \frac{\det(B_j(\xi', \lambda_k(\xi')))}{\prod_{i>k} (\lambda_i(\xi') - \lambda_k(\xi'))},$$

で定義する。同様に $\{P_m, B_j^0\}$ に対する Lopatinski determinant は

$$(3.8)' \qquad R^0(\xi') = R(P_m^+, B_1^0, \cdots, B_l^0) = \frac{\det(B_j^0(\xi', \mu_k(\xi')))}{\prod_{i>k} (\mu_i(\xi') - \mu_k(\xi'))},$$

で定義される。こゝで $B_j^0(D)$ は $B_j(D)$ の主部を表わす。

$\det(B_j(\xi', \lambda_k)) / \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k)$ は indeterminates $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ についての対称式で係数は ξ' の多項式である。従って $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ の基本対称式で表わされしかも係数は ξ' の多項式となる。これより $R(\xi')$ が領域 $\Xi^{n-1} - is\vartheta' - i\Gamma_0$ $(s > s_0)$ で ξ' の解析函数であることが従う。同様な理由により $R^0(\xi')$ は領域 $\Xi^{n-1} - i\Gamma_0$ で解析的であり $\Xi^{n-1} - i(\Gamma_0 \cup \{0\})$ へ連続的に拡張される。

さて吾々は以後 Shapiro-Lopatinski 条件

$$(3.9) \qquad R(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in \Xi^{n-1} - is\vartheta' - i\Gamma_0 \quad (s > s_0)$$

s_0 は十分大

を仮定しよう。† これは楕円型境界値問題でよく知られているように complementary or cover condition と呼ばれる次の条件と同値である。

"各 $\xi' \in \Xi^{n-1} - is\vartheta' - i\Gamma_0$ を固定する毎に λ の多項式 $B_j(\xi', \lambda)$, $j = 1, \cdots, \ell$ は $P^+(\xi', \lambda)$ を modulo として一次独立である。"

更に吾々は

(3.9)′ $\quad R^c(\xi') \neq 0 \quad \text{for} \quad 0 \neq \xi' \in \{\xi' ; \xi \in \mathrm{Re}\, A\}$

を仮定する。吾々はまた $R_j(x_n, \xi')$ を $D(P^+)(\xi') \neq 0$ なる $\xi' \in \Xi^{n-1} - is - i\Gamma_0$ に対しては

(3.10)
$$R_j(x_n, \xi') = R(P^+, B_1, \cdots, B_{j-1}, e^{i\lambda x_n}, B_{j+1}, \cdots, B_\ell)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} B_1(\xi', \lambda_1(\xi')) & \cdots & B_1(\xi', \lambda_\ell(\xi')) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\lambda_1(\xi')x_n} & \cdots & e^{i\lambda_\ell(\xi')x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_\ell(\xi', \lambda_1(\xi')) & \cdots & B_\ell(\xi', \lambda_\ell(\xi')) \end{vmatrix} (j}{\prod_{i > k} (\lambda_i(\xi') - \lambda_k(\xi'))}$$

でその他の $\xi' \in \Xi^{n-1} - is - i\Gamma_0$ に対しては連続性によって定義する。

§4. system $\{P, B_j\}$ に対する反射波 $F(x,y)$ と Localization Theorem

(2.18)(2.19) の temperate solution $\hat{F}(\xi' + i\eta', x_n, y)$ は各 $\xi' \in \Xi^{n-1}$,

† Localization Theorem を得る為には

$$R(\xi') \neq 0 \quad \text{for} \quad \xi' \in \Xi^{n-1} - is\vartheta', \quad s > s_0 \quad (s_0 \text{ は十分大})$$

を仮定すれば十分である。

$\eta \in -s\vartheta-\Gamma$ (s は十分大とする), $(\eta',0)\in\Gamma$ に対し

$$\hat{F}(\xi'+i\eta', x_n, y) = (2\pi)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{R_j(x_n,\xi'+i\eta')}{R(\xi'+i\eta')}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(\xi+i\eta)}\frac{B_j(\xi+i\eta)}{P(\xi+i\eta)}d\xi_n$$

と表わされる。従って形式的に

$$(4.1)\qquad F(x,y) = (2\pi)^{-n}\int_{\Xi^{n-1}}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{R_j(x_n,\xi'+i\eta')}{R(\xi'+i\eta')}e^{i(x'-y')(\xi'+i\eta')}$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy_n(\xi_n+i\eta_n)}\frac{B_j(\xi+i\eta)}{P(\xi+i\eta)}d\xi_n\right\}d\xi'$$

を得る。ここで $\eta\in -s\vartheta-\Gamma$ (sは十分大) で $(\eta',0)\in\Gamma$ とする。
もし $m_j<m$ ならば (4.1) は y を parameter とする x の distribution となる。しかし localization theorem を得る為には $F(x,y)$ を $(x,y)\in\overline{R^n_+}\times R^n_+$ に関する distribution 即ち kernel と考えねばならない:

$$(4.2)\qquad \langle F(x,y),\ \check{\varphi}(x')\psi(x_n)\otimes g(y')h(y_n)\rangle$$
$$=(2\pi)^{-n}\int\sum_{j=1}^{\ell}\frac{R_j(x_n,\xi'+i\eta')}{R(\xi'+i\eta')}e^{-iy'(\xi'+i\eta')}\hat{\varphi}(\xi'+i\eta')\psi(x_n)g(y')$$
$$\times\left\{\int e^{-iy_n(\xi_n+i\eta_n)}\frac{B_j(\xi+i\eta)}{P(\xi+i\eta)}h(y_n)\,d\xi_n\,dy_n\right\}d\xi'\,dx_n\,dy',$$

$$\varphi, g\in C_0^\infty(R^{n-1}),\quad \check{\varphi}(x')=\varphi(-x'),\quad \psi\in C_0^\infty(\overline{R^1_+}),\quad h\in C_0^\infty(R^1_+).$$

この式は意味をもつ。実際 ξ_n についての積分は $\{\quad\}$ の中で y_n に関し部分積分を何回か行えば収束する。また ξ' についての積分も収束する。それは $\hat{\varphi}(\xi'+i\eta')$ が ξ' の急減少函数であり一方 ξ' についての他の被積分函数は Seidenberg の定理を用いれば $|\xi'|\to\infty$ のとき $|\xi'|$ のある代数的 order

でしか増大しないことがわかるからである。吾々は(4.2)によって reflected Riemann kernel を定義する。

さて $\det(B_j^0(\xi', \mu_k(\xi')))$ を $\Delta(\xi')$ でその(j,k)-cofactor を $\Delta_{jk}(\xi')$ で表わそう。$D(P_m^+)(\xi') \neq 0$ なる real ξ' に対し δ を十分小さな正の数として

$$(4.3) \qquad d_k(\xi') = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\mu_k(\xi')|=\delta} \frac{z\left\{P_m(\xi',z)\frac{\partial P_{m-1}}{\partial z}(\xi',z) - \frac{\partial P_m}{\partial z}(\xi',z)P_{m-1}(\xi',z)\right\}}{P(\xi',z)^2} dz,$$

とおき $D(P_m^+)(\xi') \neq 0$ なる $0 \neq \xi \in \mathrm{Re}\, A$ に対し点 ξ における $F(x,y)$ の localization を $\mu_k(\xi')$ $(1 \leq k \leq l)$ が real のとき

$$(4.4) \qquad F_{\xi,k}(x,y) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{l} \frac{\Delta_{jk}(\xi')}{\Delta(\xi')} e^{i d_k(\xi') x_n} B_j^0(\xi)$$

$$\times \int_{\Xi^{n-1}} e^{i(x'-y'+x_n \operatorname{grad} \mu_k(\xi'))\cdot(\zeta'+i\eta')} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iy_n(\zeta_n+i\eta_n)}}{P_\xi(\zeta+i\eta)} d\zeta_n \right\} d\zeta',$$

で定義し、$\mu_k(\xi')$ が real でないときには 0 と定める。ここで P_ξ は多項式 P の ξ における localization である。

このとき次の定理が成り立つ。

Localization Theorem

$\xi \neq 0$ を $\xi \in \mathrm{Re}\, A$ で $D(P_m^+)(\xi') \neq 0$ なる点とし $p = m_\xi(P)$ を ξ の P に関する multiplicity とする。そのとき $\mu_k(\xi')$ $(1 \leq k \leq l)$ が real ならば

(4.5) $t \to \infty$ のとき $t^{p+m} e^{-it\{(x'-y')\xi' + x_n \mu_k(\xi') - y_n \xi_n\}} F(x,y)$

$$\longrightarrow F_{\xi, k}(x,y) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+)$$

および

(4.6) $$\operatorname*{supp}_{(x,y)} F_{\xi,k} \subset \operatorname{sing} \operatorname*{supp}_{(x,y)} F$$

が成り立つ。更に

(4.7) $$\operatorname*{supp}_{(x,y)} F_{\xi,k} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \ ; \ y = (0, y_1, \cdots, y_n),$$
$$[x' - y' + x_n \operatorname{grad}_{\xi'} \mu_k(\xi')] \cdot \zeta' - y_n \zeta_n \geq 0 \ , \ \zeta \in \Gamma_\xi \}$$

である。

References

[1] Atiyah,M.F., Bott,R. and Gårding,L. : Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math. 124, 109-189 (1970)

[2] Deakin,A.S. : Singularities of the reflected Riemann matrix,Jour. of Math. and Mech. 17, 279-298 (1967)

[3] Duff,G.F.D. : On wave fronts, and boundary waves, Comm. Pure Appl. Math. 17, 189-225 (1964).

[4] Hersh,R. : Boundary conditions for equations of evolution,Arch. Rational Mech. Anal. 16, 243-264 (1964).

[5] Hörmander,L. : On the regularity of the solutions of boundary problems, Acta Math. 99, 225-264 (1958).

[6] Hörmander,L. : On the singularities of solutions of partial differential equations, Proc. Int. Conf. on Functional Analysis and Related Topics,Tokyo, 1969, Math. soc. of Japan 31-40 (1970), C.P.A.M., 23, 329-358 (1970).

[7] Sato,M. : Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations, Technical Report, RIMS-82 (1971).